第10講　原子と原子核

1（解答用紙3）

レーザー光が原子に与える作用を用いることにより，原子気体を冷却し，なおかつ空間のある領域に保つことができる。そのような冷却原子気体を用いて，原子の波動性を検証する次のような実験を行った。

図1のように，鉛直上向きを z 軸とする直交座標系を設定する。レーザー光によって冷却原子気体を点 $(x, y, z)=(0, 0, L+l)$ のまわりに保つ。この点から L だけ鉛直下方に，y 軸に平行な間隔 d，長さ a の二重スリットを水平に置く。さらに l だけ鉛直下方に，原子が当たると蛍光を発するスクリーンを水平（xy 面上）に置く。これらはすべて真空中にある。冷却原子気体の空間的広がり，二重スリットの間隔 d，および長さ a は，L，l に比べて十分小さいとする。スクリーン上の蛍光のようすは，ビデオカメラによって撮影する。

時刻 $t=0$ にレーザー光を切ると，個々の原子はその瞬間に持っていた速度を初速度とし，重力のみを受けた運動を始める。一部の原子は二重スリットを通過し，スクリーンに到着する。時刻 $t=0$ 以降，原子どうしの衝突はないものとする。二重スリットを通過した原子のうち，z 軸方向の初速度がゼロであったものがスクリーンに到着する時刻を t_0 とする。単位時間あたりにスクリーンに到着した原子数の時間変化は図2のようであった。原子の質量を m，プランク定数を h，重力加速度を g とする。

Ⅰ　l は L に比べて十分小さく，二重スリットを通過した後の原子の加速は無視できるものとして，以下の問に答えよ。

(1)　二重スリットを通過した原子のうち，z 軸方向の初速度がゼロであったものがスリット通過直後に持っていた速さ v，およびド・ブロイ波長 λ を求めよ。

(2)　時刻 $t=t_0$ にビデオカメラによって撮影された画像には，図3のような干渉縞が写っていた。この干渉縞の間隔 Δx_0 を求めよ。ただし，Δx_0 は d より十分大きく，l より十分小さいとする。必要ならば，θ が1より十分小さいときに成り立つ近似式 $\sin\theta \fallingdotseq \tan\theta \fallingdotseq \theta$ を用いよ。

(3)　時刻 $t=t_0$ の前後にビデオカメラによって撮影された画像にも，図3と同様な干渉縞が写っていた。時刻 t に観測された干渉縞の間隔 Δx を縦軸，時刻 t を横軸として，Δx と t の関係を表すグラフの概形を描け。ただし，図2のように時刻 $t=t_0$ の位置を横軸に明示すること。

Ⅱ　L を固定し，l を変化させて実験を繰り返した。ただし，l の大きさは L と同程度で，二重スリットを通過した後の原子の加速は無視できないものとする。z 軸方向の初速度がゼロであった原子がスクリーンに到着する時刻に観測される干渉縞の間隔を Δx_1 とする。Δx_1 と l の関係を最も適切に表しているグラフを図4の(ア)～(カ)の中から一つ選び，その理由を答えよ。

＜ Note ＞

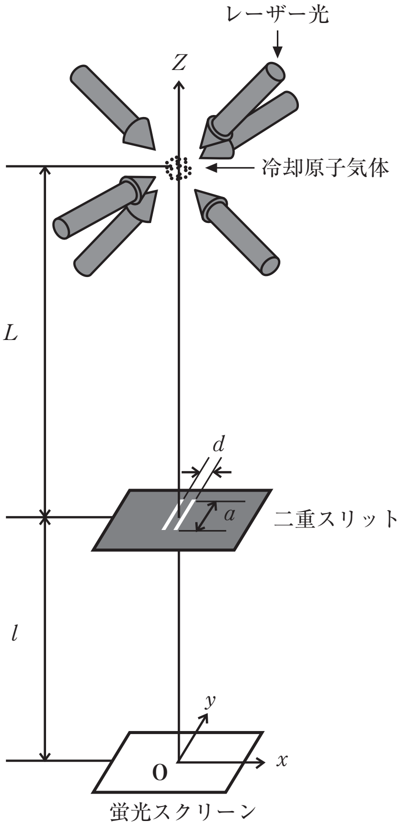

レーザー光
Z
冷却原子気体
L
d
a
二重スリット
l
y
x
O
蛍光スクリーン

図 1

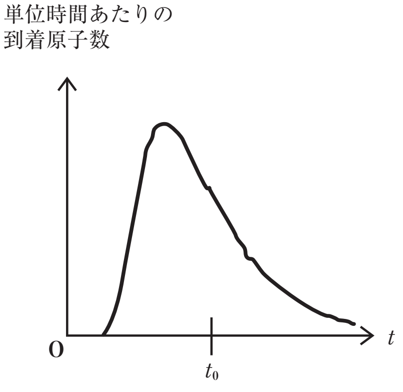

単位時間あたりの
到着原子数
O
t
t_0

図 2

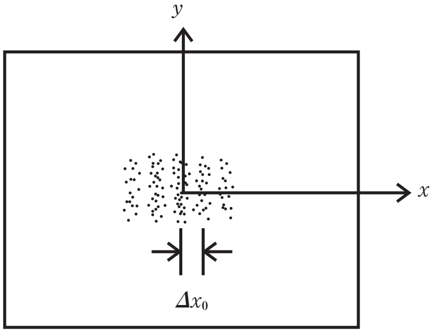

y
x
Δx_0

図 3

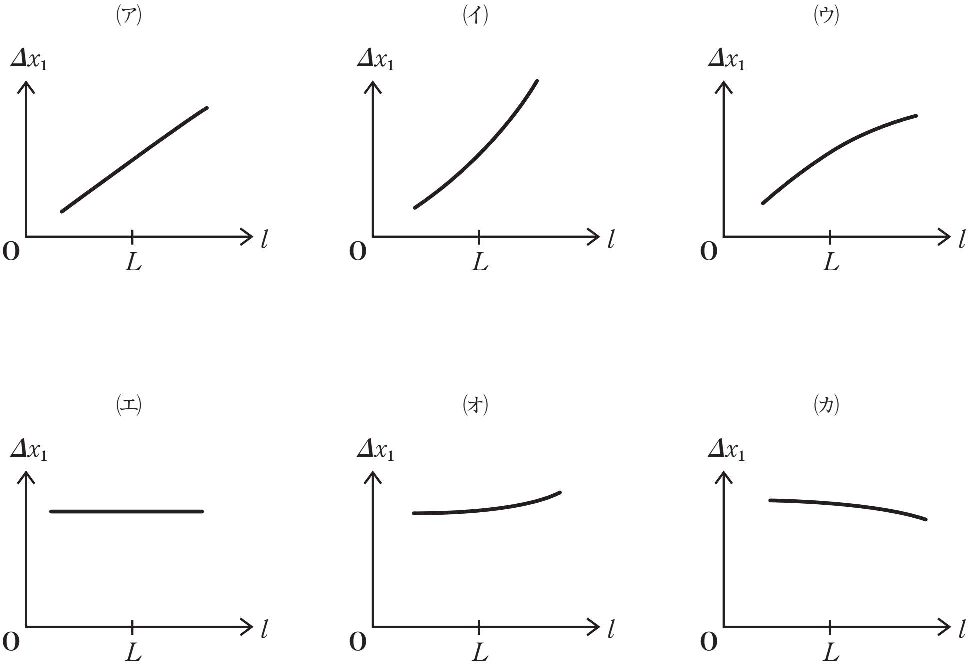

(ア)
(イ)
(ウ)
(エ)
(オ)
(カ)
Δx_1
O
L
l

図 4

＜ Note ＞

2 （解答用紙３）

炭素の原子番号は 6 であるが，自然界には質量数が 12 の $^{12}_{6}\mathrm{C}$ と質量数が 13 の $^{13}_{6}\mathrm{C}$ の 2 種類の安定な同位体が存在する。このほかに質量数 14 の $^{14}_{6}\mathrm{C}$ がごく微量あるが，これは放射性の同位体で半減期 5730 年で β 崩壊をする。$^{14}_{6}\mathrm{C}$ は宇宙線によって作られるが，作られる量と β 崩壊によって失われる量がつりあっていて，大気中に場所によらず一定の割合で含まれている。この割合は全炭素原子核数の 10^{-12} 程度であり，大気中の炭素 1g 当り毎分 15.3 個の β 崩壊が起こる量に相当する。この割合は昔も今も同じであると考えられている。生きている植物は光合成により大気から常に炭素を取り込んでいる。この炭素は食物連鎖によって動物にも取り込まれる。したがって，$^{14}_{6}\mathrm{C}$ は生きている生物体にも大気中と同じ割合で常に存在することになる。生物が死ぬと，その時点から $^{14}_{6}\mathrm{C}$ を新しく取り込めなくなるので，生物体内における $^{14}_{6}\mathrm{C}$ の割合は $^{14}_{6}\mathrm{C}$ の半減期にしたがって減少する。以下の設問に答えよ。

Ⅰ　$^{14}_{6}\mathrm{C}$ が β 崩壊してできる原子核の原子番号と質量数はそれぞれいくらか。

Ⅱ　ある古い生物の死体に含まれる炭素を調べてみると，炭素 1g 当り毎分 1.7 個の $^{14}_{6}\mathrm{C}$ の β 崩壊が起きている。この生物体中の総炭素原子核数に占める $^{14}_{6}\mathrm{C}$ の数の割合は，大気中での割合と比べて何 % になっているか。

Ⅲ　この生物はおよそ何年前に死んだものか。図 1 に関数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ のグラフを示す。このグラフから必要に応じて数値を読み取ってよい。

Ⅳ　半減期を単位にして計ったある時間（たとえば半減期の 10 万分の 1）のあいだに崩壊する原子核数を計り始めの原子核数で割った割合は，どのような放射性同位体でも半減期と無関係に一定であることを示せ。

Ⅴ　1 秒間に崩壊する原子核の数を放射能の強さという。三重水素 $^{3}_{1}\mathrm{H}$ も放射性の同位体でやはり β 崩壊をする。いま，$^{14}_{6}\mathrm{C}$ 1.0g と，$^{3}_{1}\mathrm{H}$0.46mg の放射能の強さを比べたら，たがいに同じであった。$^{3}_{1}\mathrm{H}$の半減期を求めよ。$^{3}_{1}\mathrm{H}$の質量を 3.0〔u〕，$^{14}_{6}\mathrm{C}$ の質量を 14〔u〕とせよ。

＜ Note ＞

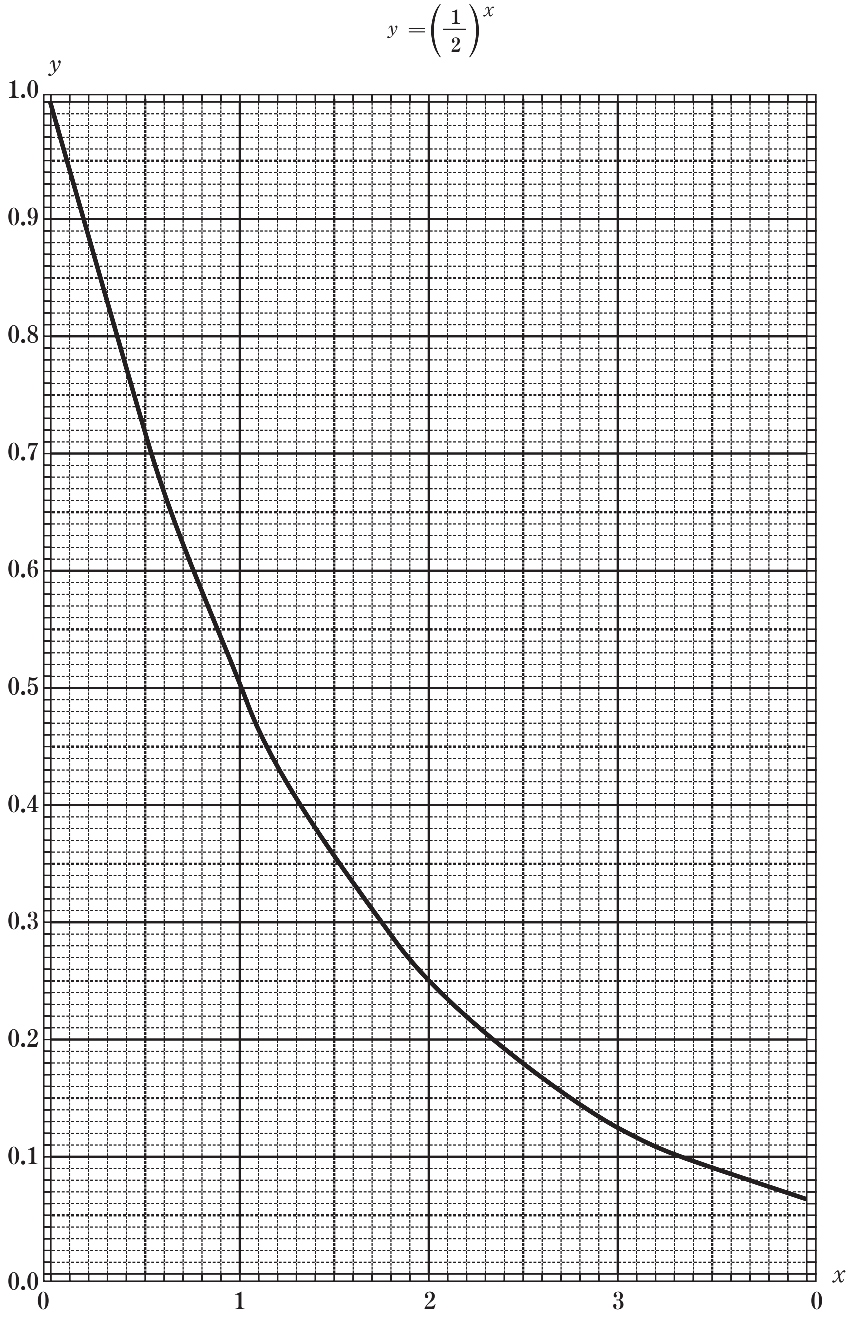


図 1

＜ Note ＞

第 10 講　確認テスト

（解答用紙３）

原子番号 26，質量数 55 の放射性同位体 ${}^{55}_{26}\mathrm{Fe}$ は ${}^{A}_{Z}\mathrm{Mn}$ に崩壊する。これは β 崩壊の一種であるが, 通常の β 崩壊のように原子が電子(e^-)を放出して新しい原子核に変わるのではなく，原子核が原子内で原子核近傍をまわる電子を捕獲して，新しい原子核に変わる(崩壊する)。すなわち表記すると以下のようになる。

$${}^{55}_{26}\mathrm{Fe}+\mathrm{e}^- \longrightarrow {}^{A}_{Z}\mathrm{Mn}$$

この崩壊について以下の問いに答えよ。

Ⅰ　上の ${}^{A}_{Z}\mathrm{Mn}$ の原子番号 Z と質量数 A はいくらか。

Ⅱ　Fe 原子内の電子が原子核から受ける静電気力は，原子内にはその電子しかなく，原子核と電子間の距離が同じとすれば，水素原子の場合の何倍になるか。

ボーア原子模型では，電子は，原子核から受ける静電気力を向心力として，以下に示す量子条件を満たす円軌道をまわる。

$$mvr=\frac{nh}{2\pi}$$

ここで，m，v，r はそれぞれ電子の質量，速さ，軌道半径を表し，h はプランク定数，n は量子数である。

ボーア原子模型に基づき，Fe 原子内や Mn 原子内で円軌道をまわる電子について以下の問いに答えよ。ただし，特に断らない限り，原子内には着目している一つの電子以外に電子はないと仮定して計算せよ。

Ⅲ　Fe 原子の量子数 $n=1$ の円軌道の半径は，水素原子の場合の何倍か。

Ⅳ　Fe 原子の量子数 $n=1$ の準位のエネルギーの絶対値は，水素原子の場合の何倍か。ただし，エネルギーは，電子が無限遠で静止している場合をゼロと定義する。

Ⅴ　水素原子の量子数 $n=1$ の準位のエネルギーは $-13.6\mathrm{eV}$ である。Fe 原子ではいくらになるか。また Mn 原子のこの準位のエネルギー E_0 はいくらか。

Ⅵ　実際の Fe 原子では，多くの電子がいろいろな軌道をまわっている。いま崩壊で Fe 原子の量子数 $n=1$ の円軌道にいた電子が捕獲されたとする。崩壊で生まれた Mn 原子では，$n=2$ の軌道にいる電子が，空きが生じた $n=1$ の軌道に移ってくる。この際放出される光子(X 線)のエネルギーを，設問Ⅴで定義した E_0 を使って表せ。ここでも，$n=1$ や $n=2$ の準位のエネルギーは，原子内に１つの電子しかないとして計算したものを用いよ。

＜ Note ＞

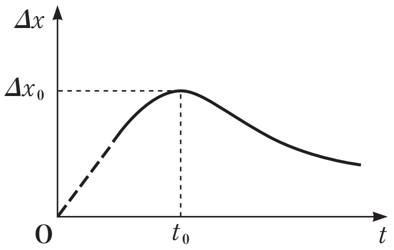
第 10 講　解答

1

Ⅰ　(1)　$v=\sqrt{2gL}$　　$\lambda=\dfrac{h}{m\sqrt{2gL}}$

(2)　$\dfrac{hl}{md\sqrt{2gL}}$

(3)　右図



Ⅱ　ウ（理由は略）

2

Ⅰ　原子番号：7，質量数：14

Ⅱ　11％

Ⅲ　1.8×10^4 年

Ⅳ　略

Ⅴ　12 年

第 10 講　確認テスト

【解答】

Ⅰ　$Z=25$　$A=55$

Ⅱ　26 倍

Ⅲ　$\dfrac{1}{26}$倍

Ⅳ　676 倍

Ⅴ　Fe：-9.19[keV]　Mn：-8.50[keV]

Ⅵ　$\dfrac{-3}{4}E_0$

【解説】

Ⅰ

反応式は

$${}^{55}_{26}\mathrm{Fe}+\mathrm{e}^- \longrightarrow {}^{55}_{25}\mathrm{Mn} \qquad \therefore\ \underline{Z=25,\ A=55}$$

Ⅱ

$$f(\mathrm{Fe})=k\frac{26e\cdot e}{r^2}=26\cdot k\frac{e^2}{r^2}=26f(\mathrm{H}) \qquad \therefore\ \underline{26\text{ 倍}}$$

Ⅲ

$$\begin{cases}\text{電子について，円運動の方程式：}m\dfrac{v^2}{r}=k\dfrac{e^2}{r^2}\\ \text{Bohr の量子条件：}mvr=\dfrac{h}{2\pi}\cdot n\end{cases}$$

より，

$$r=\frac{\left(\dfrac{h}{2\pi}\right)^2\cdot n^2}{mke^2}$$

となるので，e のひとつを $26e$ とすると，$\underline{\dfrac{1}{26}}$倍となる。

Ⅳ

エネルギー準位は

$$E_n(\mathrm{H})=-\frac{m(ke^2)^2}{\left(\dfrac{h}{2\pi}\right)\cdot n^2}$$

となるので，Fe の場合は，水素の 26^2 倍　$\therefore$ $\underline{676\text{ 倍}}$

Ⅴ

まず，$E_1(\mathrm{H})=-\dfrac{m(ke^2)^2}{\left(\dfrac{h}{2\pi}\right)^2}=-13.6[\mathrm{eV}]$

よって，

$$\begin{cases}E_1(\mathrm{Fe})=-13.6\times26^2=\underline{-9.19[\mathrm{keV}]}\\ E_1(\mathrm{Mn})=-13.6\times25^2=\underline{-8.50[\mathrm{keV}]}\end{cases}$$

Ⅵ

$$E_2(\mathrm{Mn})-E_1(\mathrm{Mn})=\underbrace{(-8.50)}_{E_0}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{1^2}\right)=\underline{\frac{-3}{4}E_0}$$